

11. POLINOMIOS: SUMA, RESTA Y PRODUCTO.

- **Monomio.**– Producto de un número real por una o varias potencias en las que las bases son letras. El número real se llama *coeficiente*, y las letras con sus exponentes *parte literal*. Las letras simbolizan números cuyo valor no conocemos.

Ej: $3x^2y$; Coeficiente: 3; Parte literal: x^2y

- **Grado de un monomio.**– Suma de los exponentes que aparecen en la parte literal.
- **Monomios semejantes.**– Los que tienen igual la parte literal.
- **Suma y resta de monomios.**– Sólo se puede efectuar si son semejantes. Se suman o restan los coeficientes y se deja igual la parte literal.

Ej: $8x^2 + 6x^2 = 14x^2$

- **Producto de monomios.**– Se puede efectuar siempre. Se multiplican los coeficientes y se multiplican las partes literales, siguiendo las reglas de las potencias.

Ej: $-2x^2 \cdot 3x^3 = -6x^5$

- **Polinomio.**– Suma o resta indicada de varios monomios, cada uno de los cuales se llama *término*. Si no contiene términos semejantes, se dice que el polinomio es *irreducible*.

Si alguno de los términos no tiene letras se denomina *término independiente*.

Si sólo tiene dos términos, se denomina *binomio*.

- **Grado de un polinomio.**– Grado de su término de mayor grado.
- **Valor numérico de un polinomio.**– Es el número que resulta cuando se sustituye cada letra por un número determinado y se efectúan todas las operaciones.
- **Suma y resta de polinomios.**– Se suman o restan los coeficientes de los términos que sean semejantes.

Ej: $(3x^2 - 5x + 2) + (2x^3 - 4x - 6) = 2x^3 + 3x^2 - 9x - 4$

- **Producto de un monomio por un polinomio.**– Se multiplica el monomio por cada término del polinomio.

Ej: $2x^2 \cdot (3x^4 - 2x^2 + x + 1) = 6x^6 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2$

- **Producto de polinomios.**– Se multiplica cada término de un polinomio por cada término del otro.

Ej:

$(3x + 2) \cdot (-2x^2 + 6x - 8) = -6x^3 + 18x^2 - 24x - 4x^2 + 12x - 16 = -6x^3 + 14x^2 - 12x - 16$

- **Potencia de un binomio.**– Puede efectuarse mediante la fórmula denominada *binomio de Newton*:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ se denominan *números combinatorios*, y pueden obtenerse a partir del *triángulo de Tartaglia*:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & & & & & & \dots \end{array}$$

El valor de n es el segundo número de cada línea.

Ej: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Cuando se trata de $(a-b)^n$, los coeficientes de los términos que ocupan lugares impares son negativos.

- **Productos notables.**— Son los siguientes:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

1. Efectúa las siguientes sumas y restas:

a) $-x^3 + 3x^2y + y^3 - 4x^2y + 2x - 5xy + 6y^3 - 7x^3 + 6x$

b) $(5x^3 - 4x^2 - 6x + 1) - (x^3 - 7x^2 + 2x - 5) - (4x^3 + 3x^2 - 8x + 6)$

c) $\frac{3}{5}x^4 - 2x^3 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2$

e) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{6}x$

d) $\sqrt{98} \cdot x^2 - \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot x^2$

2. Halla el valor numérico de los siguientes polinomios para los valores que se indican:

a) $8x^3 - 4x^2 + 5x - 10$, para $x = 2$

b) $5x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 6x + 4$, para $x = -3$

c) $4x^3 - 12x^2 + 8x - 9$, para $x = \frac{1}{4}$

3. Dados los polinomios $P(x) = 5 + 3x + 3x + 6x^2 - 7x^4$, $Q(x) = 3x^5 - 2x^2 + 2$ y $R(x) = x^3 - x^5 + 3x^2$, calcula:

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$

d) $\frac{1}{2} \cdot P(x) - 2 \cdot Q(x) + \frac{2}{3} \cdot R(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $R(x) - 2 \cdot Q(x)$

e) $\frac{1}{3} \cdot [P(x) - R(x) + 2 \cdot (P(x) + R(x) - 3 \cdot Q(x)) - R(x)] + 2 \cdot Q(x)$

4. Efectúa, dando el resultado más simple posible:

a) $4x \cdot x^2 \cdot 5x^3$

k) $(x^3 - 4x) \cdot (1.000x^2 - 1.000)$

b) $(-8x^2y) \cdot (-4xy^2) \cdot (3y^3) \cdot (-2xy)$

l) $(x + 2)^2$

c) $\frac{2}{3}xy^2z \cdot \left(-\frac{5}{4}xy^2z^2\right) \cdot \frac{9}{10}y^3z$

m) $(4x - 5)^2$

d) $(x^2 - 2x + 1) \cdot 3x$

e) $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{3}{4}x^2$

n) $\left(\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}\right)^2$

f) $(2 \cdot \sqrt{2} \cdot x^3 + \sqrt{10} \cdot x^3) \cdot \sqrt{2} \cdot x^4$

o) $(6x - 4) \cdot (6x + 4)$

g) $(2x^2 + 3x - 1) \cdot (4x - 3)$

p) $[(2x - 4) \cdot (2x + 4)] - (4x - 16)^2$

h) $(2x^2 - x - 1) \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right)$

q) $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2x + \frac{1}{4}\right)^2$

i) $\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{5}x - 6\right) \cdot \left(\frac{5}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{3}\right)$

r) $(1 - 2x)^3$

j) $(\sqrt{2} + x) \cdot (2 + \sqrt{2} \cdot x + x^2)$